Exercice N°5

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\tan^2 x$. On note **c** sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Tracer la courbe **c** dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2°) Soit (D) le domaine du plan limité par la courbe **c** , l'axe des abscisses et les droites : $x=0$ et $x=\frac{\pi}{4}$.

a) Montrer que l'aire (en unité d'aire) du domaine (D) est : $1-\frac{\pi}{4}$.

b) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx=\frac{1}{3}$.

3°) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $U_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}(x)dx$.

a) Montrer que pour tout $n\geq 1$, $U_n\geq 0$.

b) Montrer que (U_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que pour tout $n\geq 1$, $U_{n+1}+U_n=\frac{1}{2n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

1°) a) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

on a f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

et $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

on a

$$f'(x)=2\cdot(1+\tan^2(x))\cdot\tan(x)\geq 0$$

$$(f^n)'=n\cdot f'\cdot f^{n-1}$$